DEUXIÈME COMPOSITION
(Option agronomie - option biochimie-biologie)

Durée : 3 heures

L'énoncé est constitué de deux problèmes indépendants.

PREMIER PROBLEME

Dans tout ce problème m désigne un paramètre réel et on considère la matrice :

$$A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{pmatrix}$$

On désignera par f l'unique application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$, est $A(m)$.
Enfin, on notera :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. On suppose dans cette question que m est égal à 1.
1.a) Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
1.b) Calculer, pour tout n entier naturel non nul, $[A(1)]^n$.

2. Dans toute la suite du problème on suppose que m est différent de 1.
2.a) Justifier le fait que $A(m)$ est inversible.
2.b) Déterminer deux réels a et b, dépendants de m, tels que l'on ait :

$$[A(m)]^2 = a\,A(m) + b\,I$$

2.c) En déduire une expression de $[A(m)]^{-1}$ en fonction de $A(m)$ et de I, puis expliciter les coefficients de $[A(m)]^{-1}$ en fonction de m.

3. On pose :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.a) Calculer J^2.
3.b) En déduire J^k en fonction de J et de k, pour tout k entier naturel non nul.
3.c) Exprimer $A(m)$ en fonction de I, de J et de m.
3.d) En déduire, pour tout n entier naturel non nul :

$$[A(m)]^n = I + [1 - (1 - m)^n]\,J$$

DEUXIEME PROBLEME

Dans tout le problème a désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, b et r sont deux entiers naturels non nuls tels que :

$$b + r = a$$

On considère une urne qui, au départ, contient b boules blanches et r boules rouges. Dans tout le problème, on effectuera des tirages successifs, au hasard, d'une boule suivant la règle suivante :

◆ Si la boule tirée est rouge, on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

◆ Si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne, mais elle est remplacée par une boule rouge prélevée dans une urne auxiliaire. On procède ensuite au tirage suivant.

n désigne un entier naturel non nul et on notera R_n l'événement : "la n-ième boule tirée est rouge".

1.a) Déterminer la probabilité des événements R_1 et R_2.

1.b) Dans cette question, k est un entier qui vérifie la relation :

$$0 \leq k \leq \text{Min}(b, n-1).$$

On suppose qu'au cours des n-1 premiers tirages, on a obtenu k boules blanches. Quel est le nombre de boules rouges présentes dans l'urne ?

En déduire la probabilité de R_n, sachant qu'au cours des n-1 premiers tirages, on a obtenu k boules blanches.

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois une boule rouge.

2.a) Combien y-a-t-il de boules de chaque couleur dans l'urne après b tirages qui ont tous donné une boule blanche ?

2.b) Quelles sont les différentes valeurs que peut prendre X ?

2.c) Justifier, pour k entier ($1 \leq k \leq a - r + 1$), la relation :

$$P[X = k] = \frac{(a-r)!}{(a-r-k+1)!} \times \frac{r+k-1}{a^k}$$

3. On note B_n la variable aléatoire qui vaut 1 si la n-ième boule tirée est rouge et 0 si elle est blanche.

3.a) Exprimer l'événement $[B_n = 1]$ en fonction de R_n ainsi que $E(B_n)$ en fonction de $P[R_n]$.

3.b) On considère la variable aléatoire :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} B_i$$

Que représente l'événement : $[S_n = k]$ pour k entier naturel ?

Calculer $E(S_1)$.

3.c) Soit k entier naturel vérifiant :

$$\text{Max}(0, n - b) \leq k \leq n)$$

Justifier la relation :

$$P[R_{n+1} / (S_n = k)] = \frac{r+n-k}{a}$$

3.d) En déduire :

$$P[R_{n+1}] = \frac{r+n-E(S_n)}{a}$$

3.e) Déterminer une relation entre $E(S_{n+1})$, $E(S_n)$, r, n et a.

4.a) On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui vérifient, pour tout n entier naturel strictement supérieur à 1, la relation :

$$au_{n+1} = (a-1)u_n + r + n$$

Déterminer un élément de $\mathscr{E}$ dont le terme général soit de la forme :

$$u_n = \alpha n + \beta$$

où α et β sont deux réels que l'on déterminera en fonction de a et de r.

4.b) On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui vérifient, pour tout n entier naturel non nul, la relation :

$$av_{n+1} = (a-1)v_n$$

Exprimer le terme général v_n d'un élément de $\mathscr{F}$ en fonction de son premier terme v_1.

4.c) Déduire des deux questions précédentes, l'expression du terme général u_n d'un élément de $\mathscr{E}$ en fonction de son premier terme u_1.

4.d) Donner une expression de $E(S_n)$ en fonction de n, r et a. En déduire une expression de $P[R_{n+1}]$ en fonction de n, r et a.